

Finance quantitative, risque et régulation: Les mathématiques au sein de la tourmente bancaire

IVemes Rencontres de la FSMF,
Paris

Nicole El Karoui

UPMC/LPMA, Paris
elkaroui@gmail.com

Mardi 27 Septembre 2016

Eviter une conférence "testament"

- ▶ même si la présentation est nourrie de mon expérience de vingt-cinq ans
 - avec la banques d'investissement, autour des produits dérivés
- ▶ avec des reflexions sur le "sens de la modélisation "
 - mais en reportant les reflexions politiques au pot qui suivra

Temporalité et risques

- ▶ Le temps est au coeur de la finance d'investissement
- ▶ Le futur est incertain, temps du risque et de son assurance
- ▶ Le temps des transactions, de la microstructure des marchés (HFT)
- ▶ Le temps de la calibration, et des méthodes numériques
- ▶ Le temps de la régulation

Le temps historique

1929-1940 : Grande Dépression,

- ▶ Contraction des marchés financiers
- ▶ Montée des fachismes

-
- ▶ 1929-1940 "La théorie Macroeconomie " domine. (J.Keynes (1936))
 - ▶ La microéconomie se "rationalise" avec la théorie de l'équilibre général (L.Valras, K.Arrow, G.Debreu)
 - ▶ 1900 : Bachelier soutient sa thèse sur la "Théorie de la Spéculation" (Poincaré),
 - qui est le premier traité proposant une axiomatique consistante de la finance en temps continu

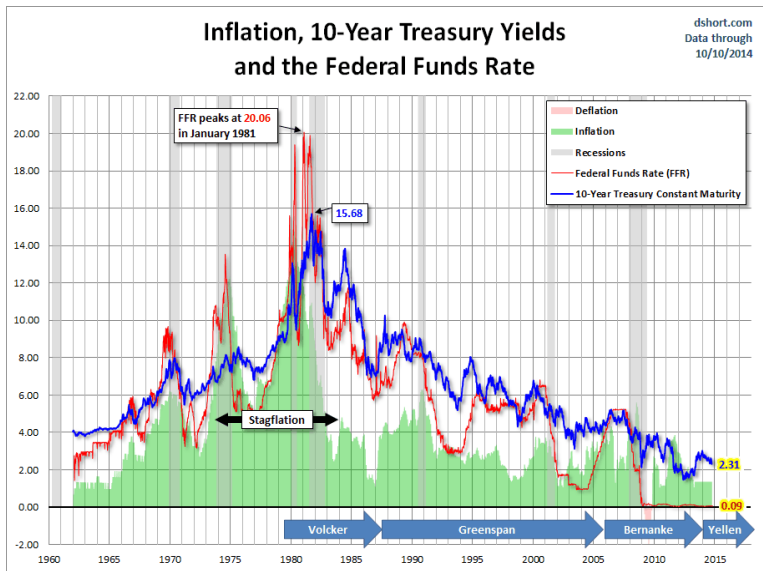
1970-1974 : Dérégulation versus Innovation financière

- ▶ Une date fatidique : le 15 Aout 1971, lorsque Nixon annonce la fin convertibilité du dollar en or.
- ▶ Innovation financière : Marchés à terme, de Future et de Contracts d'Options
 - Chicago Board of Options Exchange ouvre en 1973,
 - En France, le MATIF ouvre en 1986 , et le MONEP EN 1987.

Académie

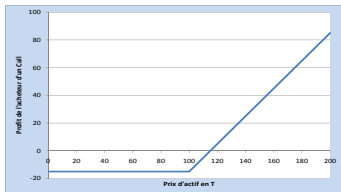
- ▶ 1960-70 : Théorie du portefeuille : Markowitch,
- ▶ 1973 : La théorie de Black-Scholes- Merton sur l'évaluation et la couverture des options.

Les effets de la dérégulation : 1970-2015 sur les taux



Le temps risqué des marchés à terme

- ▶ **contract à terme** = promesse de vente à un **horizon fixé T** à un prix fixé aujourd'hui.
- ▶ **contrats de swaps**(1985) = échange des intérêts, taux fixe, taux variable aux dates de paiement de coupons d'un prêt (long terme essentiellement)
- ▶ **Contracts d'Options** donnent le **droit**, mais pas l'obligation, d'acheter(vendre) un titre négociable dans le futur à un prix garanti appelé = **exercice price = strike price = K** , souvent proche du prix forward. Exposition est $(X_T - K)^+$.



Pertes limitées pour l'acheteur, **illimitées pour le vendeur**



Les défis pour le vendeur : ne pas subir les effets du temps

- ▶ Les pertes peuvent être très grandes, car l'avenir n'est pas prévisible
- ▶ On ne peut pas faire jouer l'idée d'une perte moyenne, car il n'y a pas d'effet de masse comme en assurance
- ▶ Les titres assurés sont **échangeables** dans le marché, on peut suivre leur cours au jour le jour, et investir dans un portefeuille (si pas trop de frais)

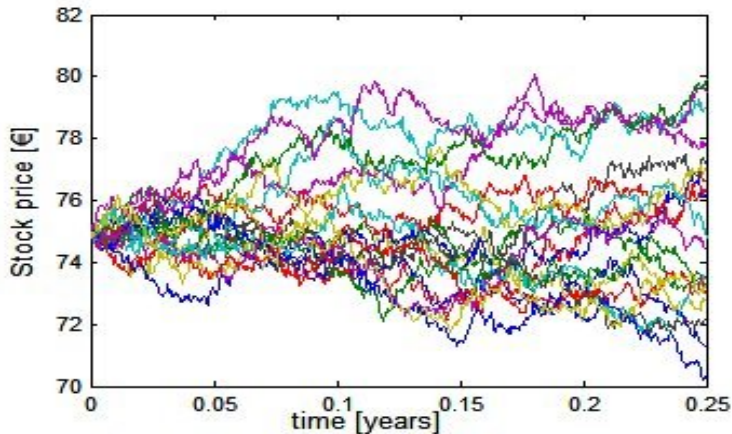
Un problème de cible stochastique

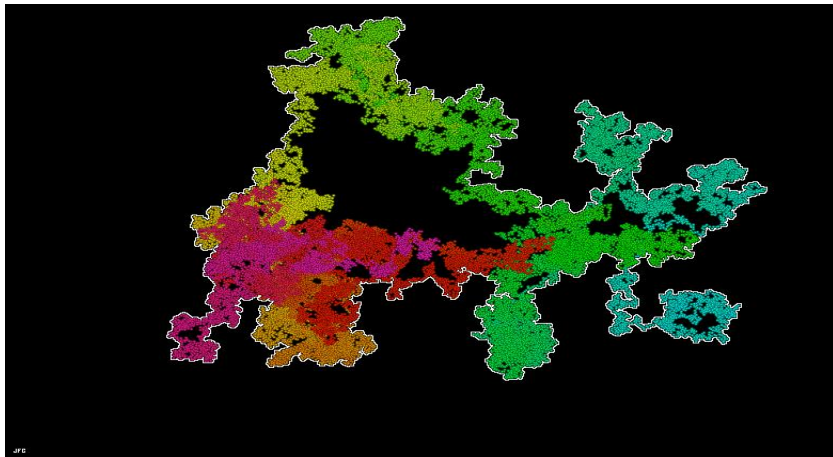
- ▶ L'idée de deux jeunes universitaires américains **Black et Scholes**(1973)
- ▶ investir dans un portefeuille dynamique,
 - dont la trajectoire est pilotée "continument" pour arriver le plus près possible de la cible garantie $(X_T - K)^+$
- ▶ Le prix d'un dérivé répliquable est le coût de sa couverture
- ▶ "Le suivi de marché devient la réalité objective" (Nicolas Bouleau)

Le temps plus lent de la recherche académique

L'incertain est modélisé via une famille de trajectoires possibles continues modélisant le cours de l'actif.

Exemple de Trajectoires simulées de cours





Merci à J.F Colonna (CMAP)

Portefeuille Autofinçant sur un titre négociable S

- ▶ The variation de **valeur** V_t d'une stratégie, avec δ_t actions au temps t est
 - le gain est du à l'investissement dans le titre risqué $\delta_t dS_t$
 - l'intérêt (taux court r_t) du à l'investissement de la richesse restante $V_t - \delta_t S_t$ dans du cash
- ▶ **Equation rétrograde** de la couverture autofinçante

$$\begin{cases} dV_t = r_t(V_t - \delta_t S_t)dt + \delta_t dS_t = r_t V_t dt + \delta_t (dS_t - r_t S_t dt), \\ V_T = (S_T - K)^+ \quad \text{contrainte terminale} \end{cases}$$

BS Solution pour le GBM $dS_t = S_t[r dt + \sigma(dW_t + \theta dt)]$, $\mu = r + \theta\sigma$

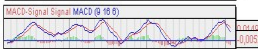
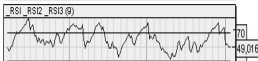
- ▶ Formule de BS pour les Calls : **pas de dépendance par rapport à la tendance** μ

$$C^{BS}(t, x, r, K, T, \sigma) = x N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_0)$$
- ▶ Le **delta** es la dérivée du prix par rapport au spot

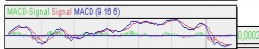
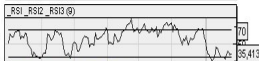
La tendance, cela existe !!

www.ProRealTime.com

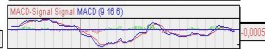
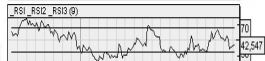
EURUSD - EURUSD Spot 1,2988 (+0,11%) 4 Heures 7:27



Avr Au 2003 Mai Sep 2004 Mai Sep 2005



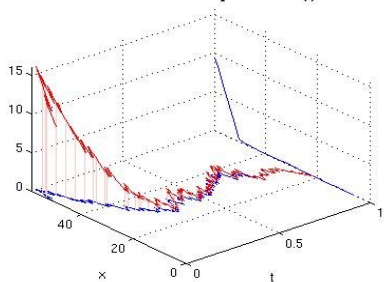
Aou Sep Oct Nov Dec 2005



23 28 2005 6 11 14 19 24

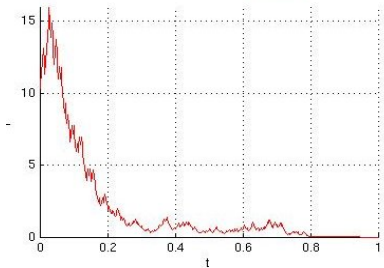
Call(50,50) : Portefeuille de couverture d'un Call (blue= asset path, red= portfolio value, green= portfolio's risky part)

simulation of stochastic phenomena: $Y(t)$

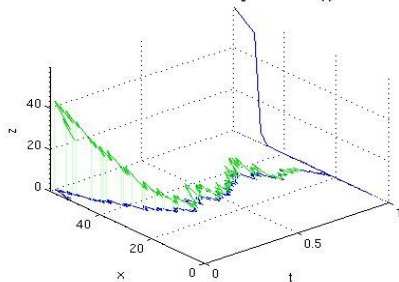


center

right



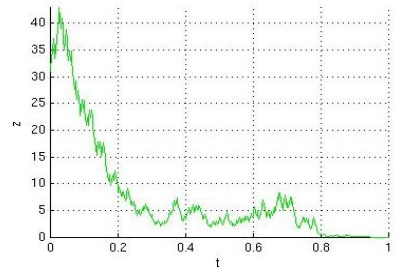
simulation of stochastic phenomena: $z(t)$



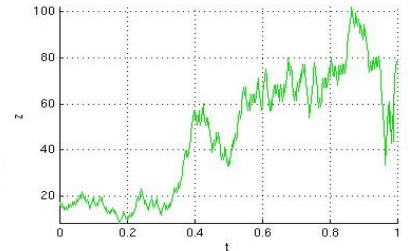
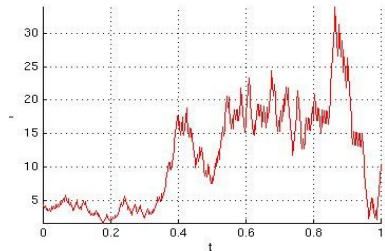
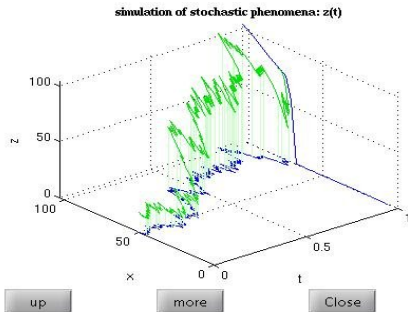
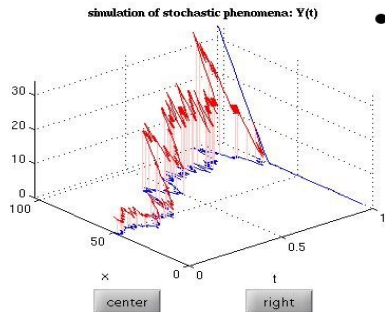
up

more

Close



Call(50,70) : Portefeuille de couverture d'un Call



Calcul différentiel stochastique sur les trajectoires

- ▶ Les concepts mathématiques ont été développés dans les années 40-50 avec des motivations purement mathématiques
 - integration stochastique
 - calcul différentiel stochastique, stochastic differential calculus
 - formule d'Itô
- ▶ dans les années 1950.. **le Professeur Itô** a montré l'importance de travailler sur les trajectoires. Un leit-motif au LPMA dans les années 1970
- ▶ 50 ans après, cet aspect trouve son expression en finance dans la théorie du portefeuille de couverture

Le bruit perturbe l'analyse locale

- ▶ Les trajectoires ne sont pas différentiables mais ont une variation quadratique de partitions dyadiques
- ▶ Même développements avec des modèles plus complexes
- ▶ Nouvelles extensions récentes (Dupire, Cont) pour ce type d'application

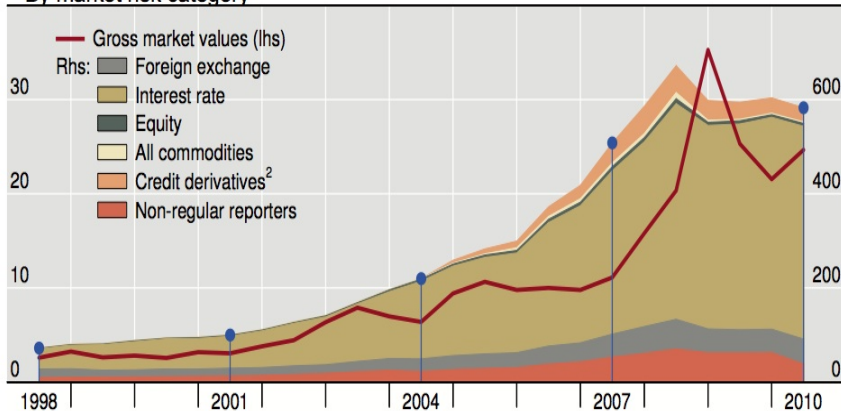
Le calcul trajectorien a été ma principale motivation pour la finance

Le temps de la mise en oeuvre

Global OTC derivatives market

Triennial and semiannual surveys, notional amounts outstanding¹, in trillions of US dollars

By market risk category



¹ Dots mark triennial survey dates and data. ² Data available from end-December 2004.

Marchés liquides : Exchange Markets : CBOT, NYSE, LIFE, MATIF,
Currencies....

Première période : 1973-1987

- ▶ les prix d'options côtés sont accessibles dans le marché
- ▶ Règle couverture : Un prix, Une volatilité implicite, une couverture
- ▶ Utilisée plusieurs fois par jour pour se couvrir quand le marché décale

Seconde période : 1993—

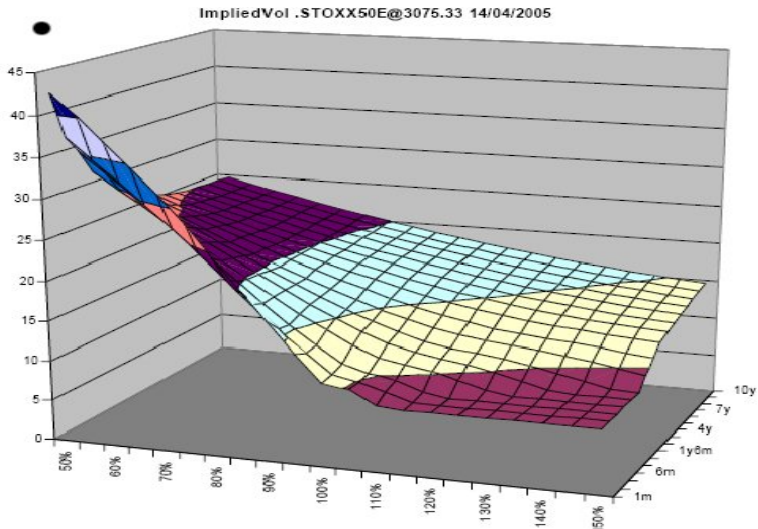
- ▶ Dérivés et options plus complexes sensibles à la volatilité
- ▶ Les options liquides sont utilisées pour la couverture
- ▶ but La surface de volatilité n'est pas plate

Formulation Quantitative

- ▶ Volatilité implicite $\Sigma^{imp}(T, K)$ pour les prix d'options côtées $C^{obs}(T, K)$ est définie par $C^{obs}(T, K) = C^{BS}(t_0, x_0, T, K, \Sigma^{imp}(T, K))$
- ▶ Stratégie de couverture implicite

$$\Delta_{t_0, x_0}^{imp}(T, K) = \partial_x C^{BS}(t_0, x_0, T, K, \Sigma^{imp}(T, K))$$

Implied Volatility Surface/ SP500



Identification des paramètres

- ▶ Résolution par EDP ou mise en oeuvre des méthodes de simulation pour le calcul des prix dans un modèle donné, en moins de 20s
- ▶ Programme de minimisation des écarts entre le futur modèle et les prix de marchés (40 rounds)
- ▶ Calcul des sensibilités aux facteurs de risque par perturbation des paramètres retenus, des centaines

L'explosion des méthodes de Monte-Carlo

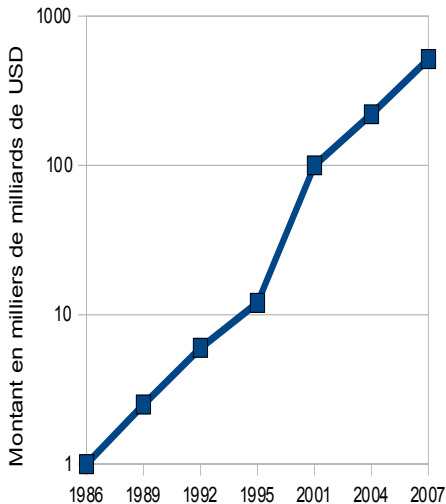
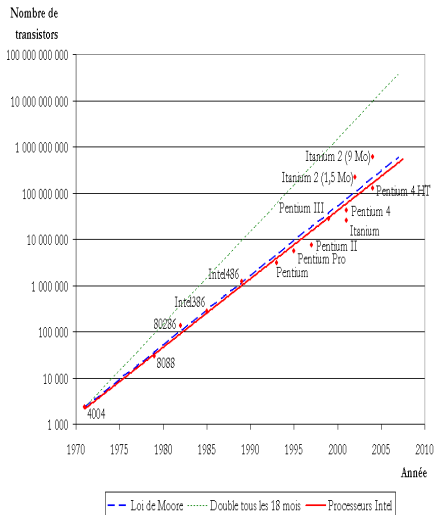
- ▶ Résolution de problèmes de grande dimension par simulation
- ▶ Accélération de toutes les méthodes numériques existantes
- ▶ Sans doute la contribution la plus importante de la finance aux autres secteurs des math appli

Les méthodes numériques, efficaces et rapides pour obtenir des prix et des couvertures en quelques secondes sont très importantes.

Méthodes numériques probabilistes

- ▶ Les méthodes probabilistes se sont imposées dans les problèmes de grande dimension, grâce aux nouvelles capacités de calcul offertes par les ordinateurs.
- ▶ Les **méthodes de Monte Carlo**, basées sur la simulation d'un grand nombre de scénarios sont efficaces en général, si on fait des petites transformations astucieuses pour réduire la variance de la variable dont on calcule le prix.
- ▶ Dans la salle de marché, il faut trouver des méthodes plus systématiques, car il est nécessaire de pouvoir calculer facilement la valorisation de l'activité agrégée.

Croissance exponentielle dans la puissance des ordinateurs : Loi de Moore



L'âge d'or de l'innovation financière

- ▶ Après 2003, Explosion du marché des dérivés, notamment de ceux dont le sous-jacent n'est pas négociable : (Volatilité, Crédit, Subprimes)
- ▶ Explosion du "Shadow Banking" avec les Hedge-Funds et le Trading Haute-Frequence
- ▶ La banque, l'investissement et la finance de marché devient une industrie très quantitative

L'âge d'or de la Finance Quantitative

- ▶ Des milliers de scientifiques, ingénieurs and mathématiciens entre dans le domaine.
- ▶ Plus des 70 meilleures universités dans le monde ont proposé des formation in "Financial Mathematics and Engineering".
- ▶ Les articles de recherche en finance mathématique augmentent exponentiellement.



I SURVIVED...DEA EL KAROU, Année 2010/ Master PVI/X démarré in 1990

Les données : un challenge

- ▶ Hétérogénéité des sources
- ▶ données manquantes ou incohérentes
- ▶ complexité des informations...

Traitement statistique des données

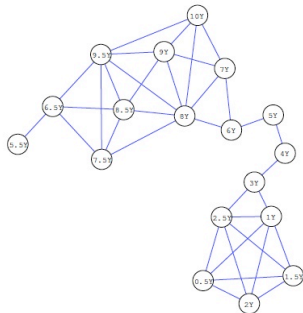
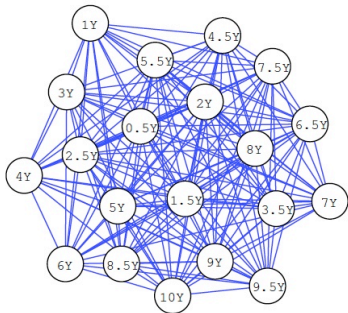
- ▶ Modèles économétriques complexes
- ▶ Développement des moyens de simulation (Monte Carlo)
- ▶ Pertinence de la modélisation
- ▶ Problèmes de grande dimension

Matrice de covariance historique de taux americains

A gauche méthode classique, à droite méthode "sparse".

Covariance Selection

Forward rates covariance matrix for maturities ranging from 0.5 to 10 years.



Les données : un challenge

- ▶ Hétérogénéité des sources
- ▶ données manquantes ou incohérentes
- ▶ complexité des informations...

Changement dans les normes comptables

- ▶ Difficulté de comptabiliser les dérivés dans les bilans
- ▶ L'enjeu devient le prix donné par un modèle simple et pas le risque
- ▶ Importance des sociétés "provider de données" dites indépendantes

Traitement statistique des données

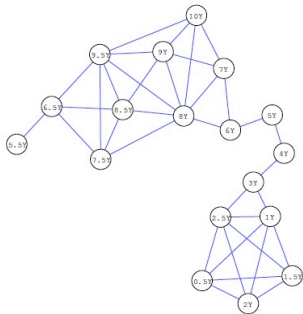
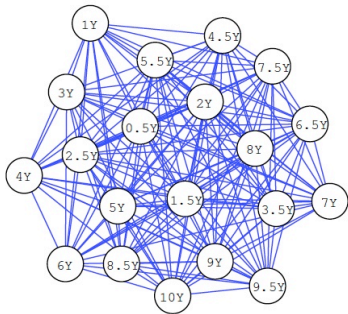
- ▶ Modèles économétriques complexes
- ▶ Développement des moyens de simulation (Monte Carlo)
- ▶ Pertinence de la modélisation
- ▶ Problèmes de grande dimension

Matrice de covariance historique de taux americains

A gauche méthode classique, à droite méthode "sparse".

Covariance Selection

Forward rates covariance matrix for maturities ranging from 0.5 to 10 years.



Le temps s'accélère

► 2007-2008 Credit Crunch/ Faillite de Lehman

- Les **excès** de l'industrie financières ont impacté négativement l'ensemble de l'économie mondiale
 - **Credit crunch** était basé sur le risque "subprime", un abaissement des critères de souscription pour l'octroi des prêts
 - **Diffusion** de la crise immobilière dans toutes les places financières à travers la titrisation de MBS
 - **Mortgage-backed securities** (MBS) qui dépendent de la performance d'une centaine de prêts
 - Drastique réduction du business du crédit dans les marchés
- Induit une crise de **confiance** et de liquidité dans le marché interbancaire
- La crise des **dettes** des pays européens

BasisSwapEuro3/6.pdf

A propos des hypothèses

- ▶ Problématique idéale, assez robuste, et très utilisée.
- ▶ Plus simple et plus robuste sur un sous-jacent que sur plusieurs.
- ▶ Suppose le risque résiduel petit, ce qui est difficile à tester.

Problème mal posé

- ▶ La procédure de calibration peu stable si le nombre d'options sur un même actif est petit.
- ▶ Il s'agit de problèmes **inverses "mal-posés"**, difficiles en plusieurs dimensions. avec leurs difficultés spécifiques.

L'effet de levier des options : Complètement minimisé dans la formation

- ▶ Un contrat d'option est plus volatile que le sous-jacent (effet de levier)
- ▶ les contrats à terme sont des instruments de spéculation fortement utilisés
- ▶ La méthode est souvent appliquée à n'importe quel sous-jacent

Qu'est-ce qu'un modèle

- ▶ Un modèle est une **représentation simplifiée** d' une réalité complexe, qui permet de quantifier une **décision**
- ▶ Un modèle est donc **indissociable** de l'activité pour laquelle il a été mis en place, et des conditions de marché associées.
- ▶ **Plusieurs** modèles sont éventuellement possibles : **Risque de modèles**
- ▶ Front-Office et Risk Management n'ont pas les **mêmes objectifs**, et donc éventuellement pas les mêmes modèles

Merton, Prix Nobel (1995) *Une vertu peut devenir un vice si elle est utilisée de manière extrême :*

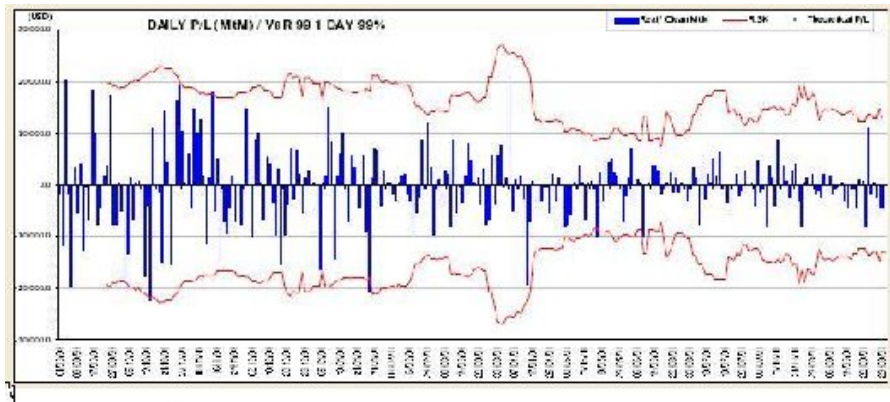
- ▶ Exactement comme pour les **modèles mathématiques** en finance. Il faut rappeler sans cesse les précautions à prendre avec eux.
- ▶ Le praticien devrait appliquer le modèle à l'essai, et bien **préciser ses limites** pour chaque application

Risque agrégé Fondamentalement, il est rare qu'on puisse couvrir tous les risques, il faut donc mesurer l'exposition résiduelle.

- ▶ La mesure traditionnelle est la **variance** de l'erreur de réplication. Un nouveau critère qui prend en compte les événements extrêmes est maintenant utilisé.
- ▶ Le critère de VaR, qui correspond au niveau maximal de pertes acceptable avec une probabilité donnée (95%) a pris beaucoup d'importance ces dernières années.

$$VaR_{\varepsilon}(X) = \inf \{k : \mathbb{P}(X + k < 0) \leq \varepsilon\}.$$

- ▶ Les autorités de régulation exigent un chiffre de VaR quotidien sur l'activité agrégé de la salle de marché. Avec une incidence sur les fonds propres.
- ▶ Les processus de Levy, aux "distribution de queues" plus épaisses sont utilisés en optimisation de portefeuille et stress-testing.
- ▶ Depuis la crise, une dizaine d'indicateurs sont exigés, surtout les types de



La dimension technique

- ▶ La pratique de la couverture quotidienne a tendance à faire perdre la vue d'ensemble du marché
- ▶ La calibration aux prix de marché est un facteur de myopie.
- ▶ Le fait d'appliquer la même méthodologie dans tous les marchés tend à minimiser l'importance de la spécificité des marchés
- ▶ Le postulat que les options n'influent pas sur la valeur du sous-jacent est clairement à remettre en cause partiellement
- ▶ dans les nouveaux marchés, il faut être très vigilant sur les risques.
- ▶ la question de la taille des pauses est difficile à contrôler
- ▶ l'augmentation de l'activité a conduit à la recherche de **solutions automatiques** qui minimise la recherche de risques par produits

Au moins trois types de comportements ne peuvent être étudiés juste avec des maths

- ▶ Intentionnalité des actions/reactions humaines
- ▶ Les notions subjectives de risque et la psychologie
- ▶ Les comportements stratégiques
- ▶ Asymétrie d'information

La théorie des jeux, la finance psychologique peuvent contribuer à une meilleure compréhension des marchés mais difficile de s'en servir dans le monde des dérivés

Comment définir ce qui est modélisable ?

- ▶ Préciser mieux la notion de risque à laquelle on se réfère, en faisant la distinction entre risque et incertain.

Différents niveaux de risque (Knight Classification, avec des niveaux additionnels)

- l'**alea probabilisable**, gouverné par une distribution connue,
 - l'**incertain complètement réductible**, pour lequel on peut estimer une probabilité de manière robuste
 - L'**incertain partiellement réductible**, qu'on aborde avec des notions de robustesse par exemple : le pire cas dans une ensemble de probabilités acceptables.
 - les notions espérance- variance disparaissent, car les règles deviennent non linéaires.
- ▶ A ce niveau, on supporte **un risque de modèle**

- ▶ **l'incertain irréductible**, que nous ne pourrions aborder avec un point de vue formalisé. (Black Swann ?)
- ▶ Comme toute classification, les frontières sont mouvantes, et on passe facilement d'un niveau à un autre
- ▶ Cela ne met pas suffisamment en évidence, l'importance de l'objectif : quel problème cherche ton à résoudre ?

Les points essentiels pour l' équilibre des eco-systèmes (Dominique Bron)

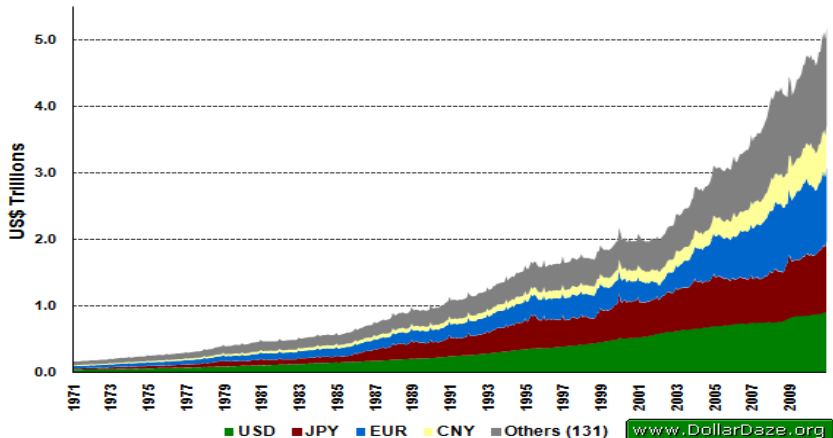
- ▶ Reotraction-Retour à la moyenne
- ▶ Pas de substituabilité
- ▶ Diversité
- ▶ Vulnérabilité

In finance

- ▶ A cause du quantitative Easing , la monnaie accroit exponentiellement : pas de retroaction
- ▶ La monétarisation donne l'illusion de la substituabilité
- ▶ Concentration après chaque crise

Concentration de la monnaie ?

Estimated Global Currency in Circulation
(Jan 1971 - Dec 2010)



Des modèles, oui un peu, simples et robustes

- ▶ On peut discuter à l'infini des modèles et de leur utilisation dans un monde aussi mouvant que les marchés financiers.
- ▶ Mais la robustesse du système n'est pas à rechercher dans un supplément de modélisation, bien au contraire.

L'info stratégique est ailleurs

- ▶ Il y a de nombreux signaux, financiers ou autres qu'on peut lire dans les marchés lorsqu'ils commencent à s'emballer
- ▶ La modification de certaines méthodes de fonctionnement, la taille des positions qui sont prises etc... sont des éléments beaucoup plus importants
- ▶ les mathématiques sont aussi utilisées comme les Agences de Rating pour donner un "label de risque contrôlé" à certaines activités non labélisables.

- ▶ Difficile de lutter rationnellement quand le seul moteur du système est de faire le maximum de rendement

Mon opinion personnelle

- ▶ L'accumulation actuelle des indicateurs de risque est très coûteuse
- ▶ et ne reflète que partiellement les risques qu'on cherche à mesurer.
- ▶ Reprenons la cartographie des risques, **sans chercher à être exhaustif**,
- ▶ Simplifions les facteurs intervenant dans les indicateurs de risques

Soyons astucieux, pour explorer ce qui est laissé de côté

- ▶ apprenons à perturber un peu le système et à regarder où cela nous emmène
- ▶ C'est comme cela que fonctionne l'algo de recherche de Google, et bien d'autres.
- ▶ Faisons confiance aux jeunes pour repenser ces questions de manière non conventionnelle

- ▶ Etre scientifique dans le monde réel est très ambigu
- ▶ Même si on peut dégager des principes théoriques, le monde de la finance ne se reproduit pas, et n'est pas "rationnel".
- ▶ Importance très grande de l'organisation des marchés, qui a beaucoup plus d'impact que tout ce qui est lié au modèle

Conclusion avec Yves Meyer, Prix Gauss, Traitement d'images

- ▶ Les mathématiques traduisent certes, l'amour du beau langage et de la forme,
- ▶ mais la connaissance scientifique, la curiosité, la créativité est un autre aspect majeur.
- ▶ Apprendre aux jeunes à démêler le vrai du faux et à penser par eux-mêmes me semble un enjeu primordial, y compris pour former les citoyens.



Merci de votre attention